

# STUDIUL REACTIUNILOR DINAMICE DIN LAGARELE ARBORILOR, PRODUSE DE CUPLAJELE ELASTICE

Marius Beniamin FAZECAS, Mircea Bogdan TATARU

UNIVERSITATEA DIN ORADEA, [mfazecas@uoradea.ro](mailto:mfazecas@uoradea.ro), [btataru@uoradea.ro](mailto:btataru@uoradea.ro)

**Cuvinte cheie:** cuplaj elastic, arbori cuplati, reactiuni

**Abstract:** This paper presents one of the fundamental problems of elastic coupling dynamics: reactive forces study in shaft bearings coupled with elastic couplings. It is analyzed using new methods particular cases of relative positioning of coupled shafts axes, radial and angular non-coaxial and with radial des-axed.

## 1. Aspecte introductive

La cuplarea arborilor, ca urmare a dezaxarilor existente, apar reactiuni în lagare conform figurii 1. Marimea acestor reactiuni determina modul de asigurare a cuplajului de arbori. Astfel, când fortele sunt mari, butucul trebuie presat pe arbore si pentru prevenirea deplasarii între butuc si arbore si pentru prevenirea frecarii.

În general, cuplajele elastice cu elemente metalice produc forte de reactiune în lagarele arborilor, forte ce depind de momentul de torsiune si de abaterile de la montaj. La cuplajele cu elemente elastice din cauciuc sau din elastomeri, reactiunile sunt relativ independente de momentul de torsiune.

Metodica de calcul al reactiunilor dinamice în lagare, în cazul cuplajelor elastice, nu difera principal fata de cea elaborata în cazul cuplarii rigid. Diferenta consta în determinarea coeficientilor de rigiditate cu luarea în considerare a flexibilitatii radiale si unghiulare a elementului elastic.

Elasticitatea elementului elastic mareste coeficientii de rigiditate, ce conduce la reducerea fortelor si momentelor de restabilire, precum si a reactiunilor din lagarele arborilor cuplati. De aceea, pentru evidentierea influentei dezaxarilor asupra reactiunilor din lagarele analizeaza cazul a doi arbori fara masa, cuplati rigid, iar elementul elastic al cuplajului este raportat, în întregul lui, la semicuplajul din stânga (fig.2).

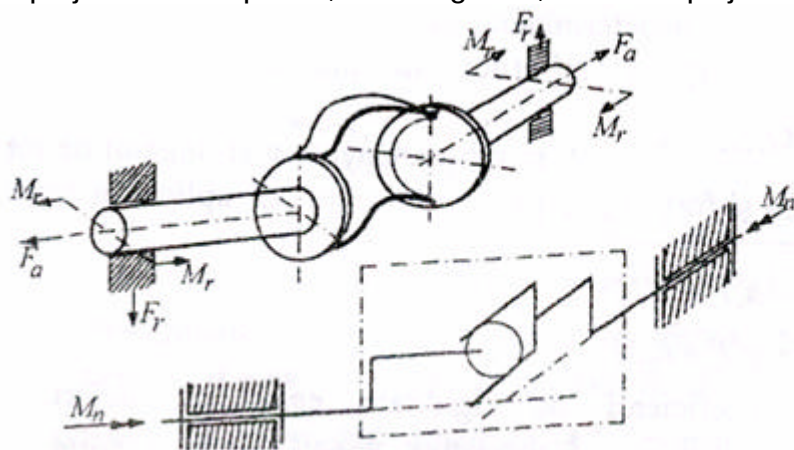


Fig.1 Forte si momente în lagare

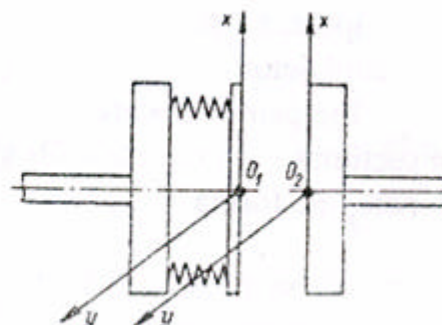


Fig.2 Schema de calcul pentru evaluarea coeficientilor de rigiditate

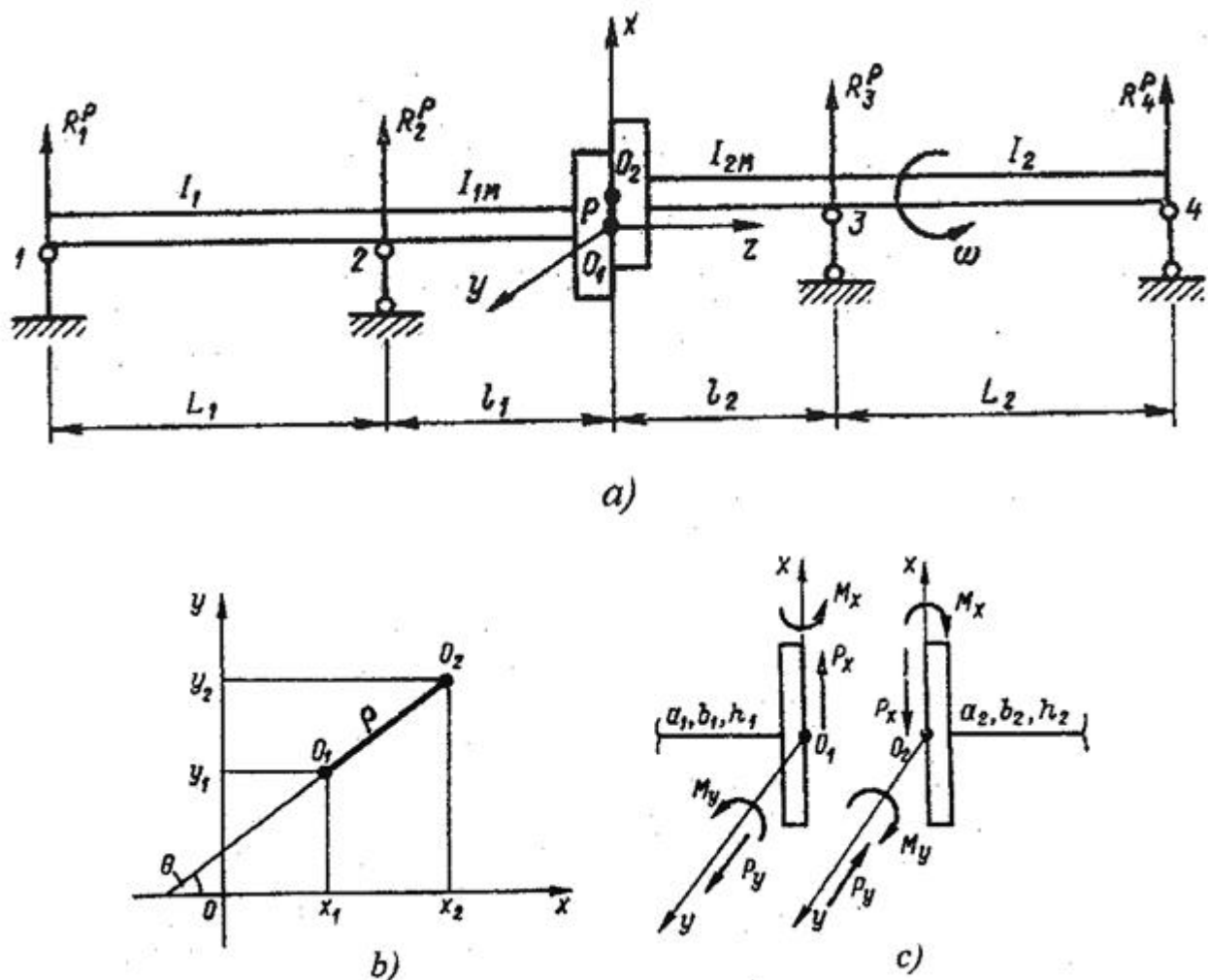


Fig.3. Schema arborilor cuplati în vederea determinării reacțiunilor din lagare, în cazul dezaxarilor radiale

## 2. Reacțiuni în lagarele arborilor cuplati

### 2.1. Reacțiuni în lagarele arborilor cu ne coaxialități radiale

Pentru determinarea influenței ne coaxialității radiale asupra reacțiunilor din lagarele arborilor cuplati se considera doi rotoți cuplati rigid cu o coaxialitate  $p$  (fig.3). Schema analizată este static nedeterminată, de aceea pentru rezolvare, se va face ipoteza suprapunerii deformațiilor arborilor în planul de articulare a semicuplajelor.

Fie, pentru fiecare din arborii 1 și 2, legătura dintre sâgeata  $v$  și unghiul de rotire al secțiunii  $v'$  în punctele  $O_1$  și  $O_2$  și forța  $P$ , respectiv momentul  $M$ , aplicat în aceleași puncte, de forma:

$$\begin{aligned} v_i &= a_i P + b_i M; \\ v_i &= g_i p + h_i M, \end{aligned} \quad (1)$$

unde  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $g_i$ ,  $h_i$  ( $i = 1, 2$ ) sunt coeficienți de rigiditate egali cu deformațiile corespunzătoare ale secțiunilor de capăt ale arborilor după aplicarea forțelor și momentelor unitare.

În cazul articulațiilor absolut rigide, coeficienții de rigiditate se determină cu următoarele relații:

$$\begin{aligned}
a_i &= \frac{l_i^3}{3EM_{iM}} + \frac{l_i^3 L_i}{3EI_i}; \\
b_i &= g_i = \frac{l_i^2}{EI_{iM}} + \frac{l_i L_i}{3EI_i}; \\
h_i &= \frac{l_i}{EI_{iM}} + \frac{L_i}{3EI_i},
\end{aligned} \tag{2}$$

unde  $l_i$  si  $l_{iM}$  sunt momentele de inertie ale suprafetelor corespunzatoare portiunilor arborilor, iar celelalte notatii sunt conform figurii 3.

Pentru determinarea pozitiei semicuplajelor se considera sistemul de coordonate fix Oxyz. Axa z este asociata cu linia reazemelor 1, 2, iar axa x cu linia dezaxarilor  $O_1O_2$  în pozitia de echilibru a sistemului (fig.3,b). Prin  $X_i$  si  $Y_i$  s-au notat coordonatele punctelor  $O_i$ , iar prin  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  -unghiurile de rotire ale semicuplajelor si ale sectiunilor de capat ale arborilor în jurul axelor x,y,z. Intre coordonate exista urmatoarele legaturi:

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + p \cos \alpha; & \alpha_2 &= \alpha_1 \\
y_2 &= y_1 + p \sin \alpha; & \beta_2 &= \beta_1
\end{aligned} \tag{3}$$

Separând imaginar semicuplajele si înlocuind actiunea unui arbore asupra celuilalt prin sarcinile corespunzatoare (fig. 3, c) se pot scrie relatiile:

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_1 P_x + b_1 M_y; & \Psi_1 &= -g_1 P_y + h_1 M_x; \\
x_2 - r &= -a_2 P_x + b_2 M_y & \Psi_2 &= g_2 P_y + h_2 M_x; \\
y_1 &= a_1 P_y - b_1 M_x; & b_1 &= g_1 P_x + h_1 M_y; \\
y_2 &= a_2 P_y - b_2 M_x; & b_2 &= g_2 P_x - h_2 M_y,
\end{aligned} \tag{4}$$

Prin rezolvarea sistemului (4) si luând în considerare (3) se obtine:

$$\begin{aligned}
P_x &= -Ar (\cos q - 1); & M_x &= -Br \sin q; \\
P_y &= -Ar \sin q; & M_y &= Br (\cos q - 1),
\end{aligned} \tag{5}$$

unde:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{h_1 + h_2}{(h_1 + h_2)(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)^2}; \\
B &= \frac{b_1 + b_2}{(h_1 + h_2)(a_1 + a_2) - (b_1 - b_2)^2}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Presupunând ca arborii se rotesc cu viteza unghiulara constanta  $\omega$ , din relatia (5), pentru  $q = \omega t$ , rezulta ca marimile  $P_x$  si  $M_y$  au doua componente: o componenta statica si una dinamica. Componentele dinamice pot fi determinate cu relatiile:

$$\begin{aligned}
P_x^r &= -Ar \cos \omega t; & M_x^r &= -Br \sin \omega t; \\
P_y^r &= -Ar \sin \omega t; & M_y^r &= -Br \cos \omega t,
\end{aligned} \tag{7}$$

Ca urmare coaxialitatea radiala conduce la generarea în planul de îmbinare al semicuplajelor a unor forte si momente perturbatoare, ce se rotesc cu viteza unghiulara  $\omega$  în sensul de rotatie al arborelui. Prin introducerea marimilor complexe  $P = P_x + iP_y$  si  $M = M_x + iM_y$ , expresiile (7) se transcriu astfel:

$$\begin{aligned} P^r &= Ar \exp i(\omega t + p); \\ M^r &= Br \exp i(\omega t + \frac{p}{2}). \end{aligned} \quad (8)$$

Din relatiile (8) rezulta ca vectorul  $M_p$  este defazat cu  $\pi/2$  fata de  $P_p$ . Totodata vectorii reactiunilor arborilor formeaza în planul de îmbinare a semicuplajelor un cuplu de forte cu bratul  $p$ , cuplu ce determina o perturbare sinusoidala a momentului de torsiune aplicat cu amplitudinea  $M_q^r = A_p^2$ .

Daca se cunosc sarcinile ce actioneaza pe arbore, pot fi evaluate reactiunile dinamice din lagare. Astfel, considerând  $b_1 > b_2$ , rezulta:

$$\begin{aligned} R_1^r &= -Ar \frac{l_1}{L_1} + Br \frac{1}{L_1}; & R_3^r &= -Ar \left(1 + \frac{l_2}{L_2}\right) - Br \frac{1}{L_2} \\ R_2^r &= Ar \left(1 + \frac{l_1}{L_1}\right) - Br \frac{1}{L_1}; & R_4^r &= Ar \frac{l_2}{L_2} + Br \frac{1}{L_2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Rezulta astfel ca cele mai încarcate, din punct de vedere dinamic, sunt lagarele 2 si 53 ce sustin portiunile în consola ale arborilor.

## 2.2. Reactiuni în lagarele arborilor cu dezaxari unghiulare

Pentru studiul influentei dezaxarii unghiulare asupra reactiunilor lagarelor se amplaseaza sistemul Oxyz (fig. 4) astfel încât axa z sa coincida cu axa lagarelor 1-2, iar axa x în planul necoaxialitatilor format de axele arborilor în stare nedeformata. Ca si în cazul dezaxarilor radiale  $X_i$  si  $Y_i$  sunt coordonatele punctelor  $O_i$ , iar  $\varphi_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  -unghiurile de rotire ale sectiunilor de capat ale arborilor în jurul axelor x, y, z. În acest caz între coordonate exista urmatoarele legaturi:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1; & y_2 &= y_1 - j \sin q; \\ y_2 &= y_1; & b_2 &= b_1 + j \cos q. \end{aligned} \quad (10)$$

Ecuatiile care în cazul dat leaga deplasarilor sectiunilor de capat ale arborilor cu sarcinile aplicate pe acestea se obtin din ecuatiile (4), daca  $p=0$ , si  $\beta_2 = -\gamma_1$ . Expresiile pentru componentele dinamice ale sarcinilor ce actioneaza asupra arborilor se deduc analog cu cazul precedent si au forma:

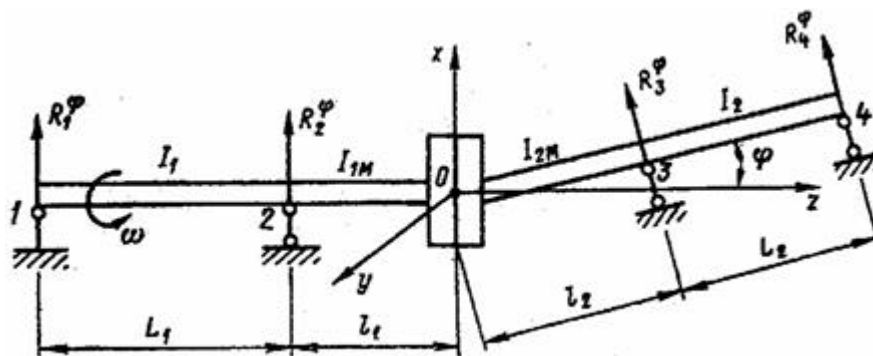


Fig.4. Schema arborilor cuplati în vederea determinării reacțiunilor din lagare, în cazul dezaxarilor unghiulare

$$\begin{aligned}
 P_x^j &= B j \cos \omega t; & M_x^j &= C j \sin \omega t; \\
 P_y^j &= B j \sin \omega t; & M_y^j &= -C j \cos \omega t; \\
 P^j &= B j \exp i \omega t; & M_y &= C j \exp i \left( \omega t - \frac{p}{2} \right)
 \end{aligned}
 \quad (11)$$

unde:

$$C = \frac{a_1 + a_2}{(h_1 + h_2)(a_1 + a_2) - (b_1 - b_2)^2}. \quad (12)$$

Vectorii  $P_f$  și  $M_f$  se rotesc în sensul de rotație al arborelui, iar  $M_f$  este defazat față de  $P_f$  cu  $\pi/2$ . Necoaxialitatea unghiulară, ca și cea radială, pe lângă sarcinile dinamice  $P_f$  și  $M_f$ , generează și un moment de torsiune perturbator sinusoidal cu amplitudinea  $M_q^j = C j^2$ .

Expresiile pentru modulele vectorilor reacțiunilor dinamice din lagarele arborilor cuplați sunt:

$$\begin{aligned}
 R_1^j &= B j \frac{l_1}{L_1} + C j \frac{1}{L_1}; & R_2^j &= B j \left( 1 + \frac{l_1}{L_1} \right) + C j \frac{1}{L_1}; \\
 R_3^j &= B j \left( 1 + \frac{l_2}{L_2} \right) + C j \frac{1}{L_2}; & R_4^j &= -B j \frac{l_2}{L_2} - C j \frac{1}{L_2}
 \end{aligned}
 \quad (13)$$

și deci, și în cazul necoaxialităților radiale, lagarele 2 și 3 sunt cele mai încărcate dinamic. Analiza relațiilor (9) și (13) arată că suma lungimilor în consola  $l = l_1 + l_2$  influențează asupra reacțiunilor din lagarele arborilor. Dacă în cazul necoaxialităților radiale raportul lungimilor  $l_1/l_2$  nu influențează reacțiunile dinamice din lagarele arborilor cuplați, în cazul necoaxialităților unghiulare raportul  $l_1/l_2$  influențează mărimea acestor reacțiuni. De exemplu dacă  $l_1 M - l_2 M = l$ , reacțiunile dinamice  $R_j^q$  din lagare au valoarea minimă când:

$$l_1 = \frac{l^2 / (2eI) + l L_2 / (3EI_2)}{3E^{-1} (L_1 / l_1 + L_2 / l_{11}) + l (EI)}, \quad (14)$$

relație obținută în condițiile în care  $b_1 - b_2 = 0$ , pentru care  $B=0$ .

În figura 5 este prezentată variația reacțiunii  $R_3^q$ , în raport de  $l_1/l_2$ , pentru cazul din

figura 4, când:  $l=500$  mm;  $d=150$  mm;  $L_1 = L_2 = 2000$  mm;  $d_1 = 220$  mm si  $d_2 = 300$  mm. Valoarea minima a reactiunii în lagar, în acest caz, este corespunzatoare raportului  $l_1/l_2 = 0,42$ .

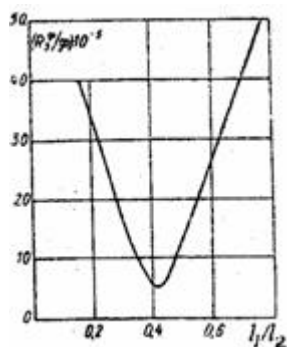
### 2.3. Reactiuni în lagarele arborilor cu necoaxialitati, radiale si unghiulare

Presupunând ca arborii cuplati au ambele forme de necoaxialitate (radiala si unghiulara), axele de coordonate se vor considera ca si în cazul necoaxialitati radiale (fig. 3). Fie unghiul  $a$  unghiul dintre suprafata în care se gaseste necoaxialitatea unghiulara si planul necoaxialitati radiale.

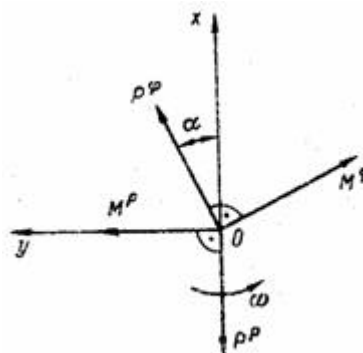
Ca si în cazul precedent, în planul de articulatie a semicuplajelor actioneaza forte si momente ale caror expresii în cazul dat sunt:

$$\begin{aligned} P^r &= A r x e^{i(\omega t + p)}; & M^r &= B r \exp i(\omega t + p / 2); \\ P^j &= B k x e^{i(\omega t + a)}; & M^j &= C j \exp i(\omega t + p / 2 + a). \end{aligned} \quad (15)$$

Amplasarea relativa a vectorilor în planul fazorial este prezentat în figura 6. Rezulta ca forte si momentele au valori minime pentru  $a = 0$  si un maxim pentru  $a = p$ .



**Fig.5. Influenta  $l_1/l_2$  asupra reactiunilor din lagare în cazul dezaxarilor unghiulare**



**Fig.6. Pozitia vectorilor de faza în cazul necoaxialitatilor radiale si unghiulare**

Reactiunea dinamica în lagarul  $j$ , pentru o valoare oarecare a unghiului  $a$  se afla cu relatia:

$$R_j = R_j^r - R_j^j \cos a,$$

unde  $R_j^r$  si  $R_j^j$  se determina cu relatiile (9) si (13).

### BIBLIOGRAFIE

1. Richard W. Hertzberg, Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials, Fourth Edition
2. Iulian Barsan s.a, Dinamica cuplajelor elastice Editura Tehnica Bucuresti, 1998